УДК 620.9

Теплопроводность в пластине при переменных источниках теплоты

© А.В. Еремин, К.В. Губарева
Самарский государственный технический университет,
г. Самара, Российская Федерация

При использовании интегрального метода теплового баланса было получено решение задачи теплопроводности для пластины с переменными во времени внутренними тепловыми источниками. Выполненные исследования позволили установить зависимость температуры от мощности и времени воздействия источника.

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, внутренние источники теплоты, дополнительные краевые условия, новая искомая функция

Thermal Conductivity in a Plate with Variable Heat Sources

© Anton V. Eremin, Kristina V. Gubareva
Samara State Technical University,
Samara, Russian Federation

Using the integral method of heat balance, a solution to the heat conduction problem was obtained for a plate with time-varying internal heat sources. The performed studies made it possible to establish the dependence of temperature on the power and time of exposure to the source.

Keywords: non-stationary thermal conductivity, internal heat sources, additional boundary conditions, new sought function

Источники теплоты внутри тела появляются в результате различных факторов, например, при воздействии электромагнитных полей, ядерного распада, протекании электрического тока в проводниках [1, 2]. Мощность источников теплоты, как правило, изменяется во времени и влияет на весь процесс теплопереноса [3–5]. Получение решений краевых задач теплопереноса, учитывающих действие тепловых источников, на основе точных аналитических методов представляет серьезные математические трудности. Кроме того, получаемые решения нередко содержат специальные функции, выражающиеся бесконечными рядами, что затрудняет их использование в инженерной практике. Таким образом, разработка приближенных аналитических методов математического моделирования процессов переноса теплоты в твердых телах с источниками теплоты является актуальной задачей.

Основную идею метода рассмотрим на примере решения нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины с переменным во времени внутренним источником теплоты при симметричных граничных условиях первого рода в следующей математической постановке [1] (рис. 1):

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} + \mathrm{PoFo} + \mathrm{Po}_1 \qquad (\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1); \tag{1}$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \tag{2}$$

$$\Theta(0, \mathrm{Fo}) = 1; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \Theta(1, \mathrm{Fo})}{\partial \xi} = 0, \tag{4}$$

где $\Theta = (T - T_0)/(T_{\text{ст}} - T_0)$ – безразмерная температура; $\xi = x/\delta$ – безразмерная координата; $\mathrm{Fo} = (a\tau)/\delta^2$ – критерий Фурье (безразмерное время); $\mathrm{Po} = \mathrm{Po}_1 \delta^2 \beta / a$ – критерий Померанцева; $\mathrm{Po}_1 = (\omega_0 \delta^2)/[c\rho a (T_{\text{ст}} - T_0)]$ – начальное значение критерия Померанцева.

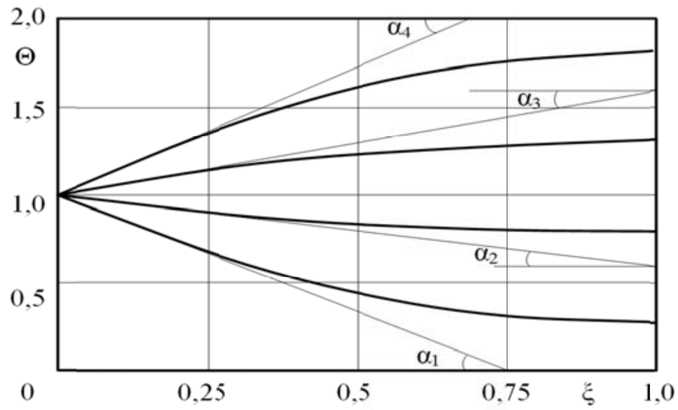

Рис. 1. Изменение температуры внутри пластины

В соответствии с предлагаемым методом введем в рассмотрение новую искомую функцию времени:

$$\varphi(\mathrm{Fo}) = \frac{\partial\Theta(0, \mathrm{Fo})}{\partial\xi} = tg\,\alpha\,, \tag{5}$$

где α – угол между касательной к графику функции $\Theta(\xi, \mathrm{Fo})$ в точке $\xi = 0$ и координатной осью.

Вернёмся к размерным величинам, где выражение (5) может быть записано в виде:

$$\varphi(\tau) = \frac{\delta}{T_{\text{ст}} - T_0}\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x}.$$

Учитывая, что согласно закону Фурье плотность теплового потока на поверхности пластины определяется выражением

$$q(\tau) = -\lambda\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x},$$

справедлива запись

$$\varphi(\tau) = \frac{\delta}{\lambda(T_0 - T_{\text{ст}})}q(\tau) = k\,q(\tau)\,,$$

где $k = const$ – некоторый коэффициент, определяемый масштабом системы. Таким образом, новая искомая представляет собой плотность теплового потока в точке приложения граничного условия первого рода в произведении с константой.

Решение задачи (1) – (4) будем отыскивать в виде алгебраического полинома

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathrm{Fo})\,\xi^{i-1}\,, \tag{6}$$

где $n \in N$ – натуральное число, соответствующее количеству членов ряда (6); $b_i(\mathrm{Fo})$ – неизвестные коэффициенты, зависящие от безразмерного времени.

Для получения решения задачи (1) – (4) в первом приближении подставим выражение (6) в граничные условия (3) и (4), а также в дополнительное условие (5). В результате подстановки получим систему трех алгебраических уравнений

$$\begin{cases} b_1 = 1; \\ b_2 + 2b_3 = 0; \\ b_2 - \varphi(\mathrm{Fo}) = 0, \end{cases}$$

из решения которой определим неизвестные коэффициенты:

$$b_1(\mathrm{Fo}) = 1; \quad b_2(\mathrm{Fo}) = \varphi(\mathrm{Fo}); \quad b_3(\mathrm{Fo}) = -\frac{\varphi(\mathrm{Fo})}{2}.$$

Выражение (6) с учетом найденных коэффициентов запишется в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = f_1(\xi)\,\varphi(\mathrm{Fo}) + 1\,, \qquad (7)$$

где $f_1(\xi) = \xi\,(1-0{,}5\,\xi)$ – координатная функция.

Потребуем теперь, чтобы решение (7) удовлетворяло не исходному дифференциальному уравнению (1), а некоторому осредненному – интегралу теплового баланса [6].

$$\int_0^1 \frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}d\xi = \int_0^1\left(\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} - \mathrm{PoFo} - \mathrm{Po}_1\right)d\xi\,. \qquad (8)$$

Вычисляя интеграл, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} + 3\varphi(\mathrm{Fo}) - 3(\mathrm{Po}_1 + \mathrm{PoFo}) = 0\,, \qquad (9)$$

из решения которого находим

$$\varphi(\mathrm{Fo}) = C_1 e^{-3\mathrm{Fo}} + \mathrm{Po}_1 + \mathrm{Po}\left(\mathrm{Fo} - \frac{1}{3}\right), \qquad (10)$$

где C_1 – константа интегрирования.

Подставляя (10) в (7), получаем

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = f_1(\xi)\left(C_1 e^{-3\mathrm{Fo}} + \mathrm{Po}_1 + \mathrm{Po}\left(\mathrm{Fo} - \frac{1}{3}\right)\right) + 1\,. \qquad (11)$$

Выражение (1) точно удовлетворяет граничным условиям (3), (4), дополнительному условию (5), а также интегралу теплового баланса (8). Для выполнения начального условия (1) составим его невязку и потребуем ортогональности невязки к координатной функции $f_1(\xi)$

$$\int_0^1 [\Theta(\xi,0)] f_1(\xi)\,d\xi = 6C_1 - 2\mathrm{Po} + 6\mathrm{Po}_1 + 15 = 0\,. \qquad (12)$$

Из решения уравнения (12) определим константу интегрирования $C_1 = \frac{1}{3}\mathrm{Po} - \mathrm{Po}_1 - \frac{5}{2}$. Выражение (11) с учетом найденного значения представляет решение задачи (1) – (4) в первом приближении и может быть записано в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \left(\left(\frac{1}{3}\mathrm{Po} - \mathrm{Po}_1 - \frac{5}{2}\right)e^{-3\mathrm{Fo}} + \mathrm{Po}_1 + \mathrm{Po}\left(\mathrm{Fo} - \frac{1}{3}\right)\right)\xi\,(1-0{,}5\,\xi) + 1\,. \qquad (13)$$

Результаты расчетов температуры по формуле (13) приведены на рис. 2, 3.

Для повышения точности получаемого решения необходимо увеличить степень аппроксимирующего полинома (6). При определении неизвестных коэффициентов $b_i(\mathrm{Fo})$ в выражении (6) помимо условий (3) – (5) будут использоваться дополнительные граничные условия [6, 7], физический смысл которых состоит в выполнении исходного дифференциального уравнения (1) и выражений, полученных после его дифференцирования в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Отметим, что в работах [7] показано, что выполнение уравнения лишь в граничных точках приводит к его выполнению и внутри области.

Для получения решения задачи (1) – (4) во втором приближении будем использовать шесть членов ряда (6) ($n = 6$), для определения неизвестных коэффициентов которого будем применять дополнительные граничные условия. Первое из них получим, записав уравнение (1) в точке $\xi = 0$

$$\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} + \mathrm{PoFo} + \mathrm{Po}_1 = 0\,. \qquad (14)$$

Для получения второго дополнительного условия продифференцируем исходное дифференциальное уравнение по пространственной переменной ξ

$$\frac{\partial^2 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3}. \tag{15}$$

Записывая соотношение (15) в точке $\xi = 0$ с учетом (5), получаем второе дополнительное условие

$$\frac{\partial q(\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^3\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3}. \tag{16}$$

Третье граничное условие может быть получено путем однократного дифференцирования исходного уравнения (1) по пространственной переменной применительно к точке $\xi = 1$. С учетом граничного условия (4) оно принимает вид

$$\frac{\partial^3\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3} = 0. \tag{17}$$

Подставляя (6) в (3) – (5) и дополнительные условия (14), (16), (17), получаем систему шести алгебраических уравнений, из решения которой определяем неизвестные коэффициенты $b_i(\mathrm{Fo})$

$$b_1(\mathrm{Fo}) = 1; \quad b_2(\mathrm{Fo}) = \varphi(\mathrm{Fo}); \quad b_3(\mathrm{Fo}) = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{Po}_1 + \mathrm{FoPo}\right);$$

$$b_4(\mathrm{Fo}) = \frac{1}{6}\frac{d\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}}; \quad b_5(\mathrm{Fo}) = -\frac{5}{24}\frac{d\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} - \frac{1}{2}\varphi(\mathrm{Fo}) + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Po}_1 + \mathrm{FoPo}\right);$$

$$b_6(\mathrm{Fo}) = \frac{1}{15}\frac{d\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} + \frac{1}{5}(\varphi(\mathrm{Fo}) - \mathrm{Po}_1 - \mathrm{PoFo}).$$

После подстановки выражения (6) в интеграл теплового баланса (8) с учетом найденных коэффициентов получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^2} + 39\frac{d\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} + 90\varphi(\mathrm{Fo}) - 9\left(10\mathrm{Po}_1 + 10\mathrm{PoFo} + \mathrm{Po}\right) = 0. \tag{18}$$

Его решение имеет вид

$$\varphi(\mathrm{Fo}) = C_1\exp(K_1\mathrm{Fo}) + C_2\exp(K_2\mathrm{Fo}) + \mathrm{Po}_1 + \mathrm{Po}\left(\mathrm{Fo} - \frac{1}{3}\right), \tag{19}$$

где $K_1 = \frac{3}{2}(-13 + \sqrt{129}) = 2{,}4633$; $K_2 = -\frac{3}{2}(13 + \sqrt{129}) = 36{,}5370$.

Выражение (8) после подстановки в него (19) может быть представлено в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = f_1(\xi)\,C_1\exp(K_1\mathrm{Fo}) + f_2(\xi)\,C_2\exp(K_2\mathrm{Fo}) + 1, \tag{20}$$

где

$$f_1(\xi) = \left(\frac{K_1}{15} + \frac{1}{5}\right)\xi^5 - \left(\frac{5K_1}{24} + \frac{1}{2}\right)\xi^4 + \frac{K_1}{6}\xi^3 + \xi;$$

$$f_2(\xi) = \left(\frac{K_2}{15} + \frac{1}{5}\right)\xi^5 - \left(\frac{5K_2}{24} + \frac{1}{2}\right)\xi^4 + \frac{K_2}{6}\xi^3 + \xi.$$

Составляя невязку начального условия и требуя ортогональности невязки к каждой координатной функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$, получаем систему двух алгебраических уравнений,

$$\begin{cases} \int_0^1 \Theta(\xi, 0) f_1(\xi)\, d\xi = 0, \\ \int_0^1 \Theta(\xi, 0) f_2(\xi)\, d\xi = 0. \end{cases}$$

из решения которой найдем $C_1 = 0{,}005\text{Po} - 0{,}1\text{Po}_1 - 2{,}0$; $C_2 = 0{,}3\text{Po} - 0{,}8\text{Po}_1 - 2{,}0$.

Выражение (20) с учетом найденных констант интегрирования представляет решение задачи (1) – (4) во втором приближении. Результаты расчетов температуры по формуле (20) приведены на рис. 2, 3.

Для дальнейшего повышения точности необходимо увеличивать число членов ряда (8). Так, в третьем приближении будем использовать девять членов ряда, в четвертом – двенадцать и так далее. Для нахождения неизвестных коэффициентов будем использовать дополнительные граничные условия. Общие формулы для их определения имеют вид

$$\frac{\partial^{k+1}\Theta(0,\text{Fo})}{\partial\xi^{k+1}} + j\text{Po} = 0 \;(\; j = 0 \;\text{ при }\; k > 3;\; j = 1 \;\text{ при }\; k \le 3\;);$$

$$\frac{\partial^{k-1}\varphi(\text{Fo})}{\partial\text{Fo}^{k-1}} = \frac{\partial^{2k-1}\Theta(0,\text{Fo})}{\partial\xi^{2k-1}};$$

$$\frac{\partial^{2k-1}\Theta(1,\text{Fo})}{\partial\xi^{2k-1}} = 0,$$

где $k = 1,\, 2,\, 3\, \ldots.$ – номер приближения.

Результаты расчётов температуры в четвертом приближении в сравнении с численным решением представлены на рис. 2, 3. Из их анализа следует, что в диапазоне $0{,}1 \le \text{Fo} < \infty$ расхождение полученных результатов не превышает 5 %.

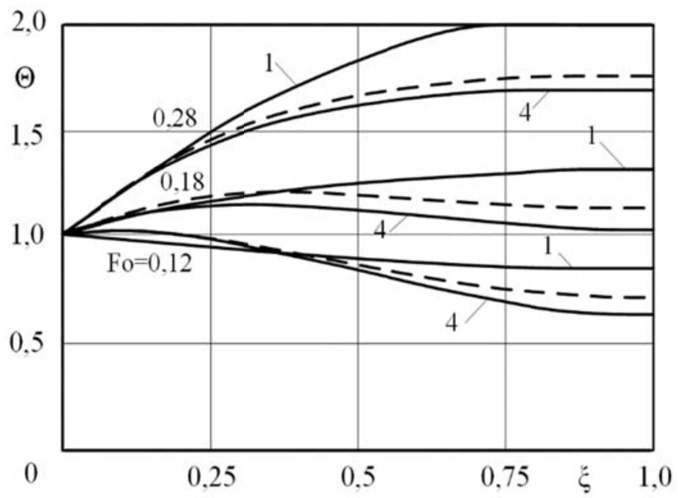

Рис. 2. Распределение безразмерной температуры в пластине.
——— – приближенное решение, – – – – численное решение;
1, 4 – номер приближения; $\text{Po}_1 = 5$; $\text{Po} = 5$

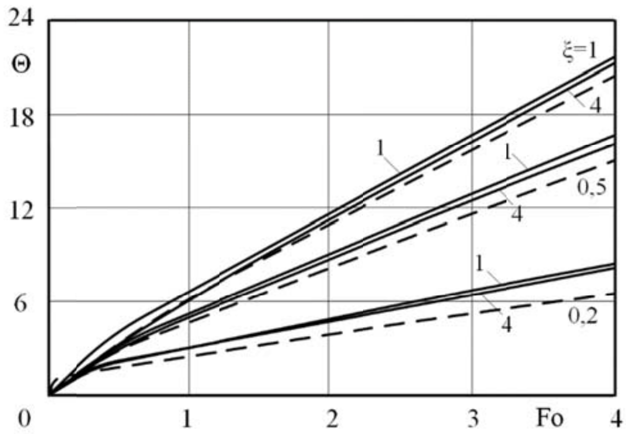

Рис. 3. Распределение безразмерной температуры в пластине.
———— – приближенное решение, – – – – численное решение;
1, 4 – номер приближения; $\mathrm{Po}_1 = 5$ ***;*** $\mathrm{Po} = 10$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 18-79-00171.

Заключение

1. В статье рассмотрены результаты разработки эффективного аналитического метода решения дифференциального уравнения теплопроводности, основанного на введении в рассмотрение новой искомой функции и дополнительных граничных характеристик. Показано, что точность предлагаемого метода зависит от степени аппроксимирующего полинома.

2. Введение новой искомой функции – плотности теплового потока $\varphi(\mathrm{Fo})$ – позволило свести решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения.

Библиографический список

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
2. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 344 с.
3. Kudinov V.A., Eremin A.V., Stefanyuk E.V. Critical conditions for thermal explosion in a plate with a nonlinear heat source // Journal Of Machinery Manufacture And Reliability. 2016. P. 38–43.
4. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Высшая школа, 1967. 492 с.
5. Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Абишева Л.С. Идентификация источника теплоты на основе аналитического решения задачи теплопроводности // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2016. Т. 59. № 5. С. 339–346.
6. Еремин А.В. Об одном методе решения нелинейных задач теплопроводности // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2018. Т. 24. № 3. С. 471–481.
7. Федоров Ф.М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000. 220 с.

Сведения об авторах / Information about the Authors

Еремин Антон Владимирович,
кандидат технических наук,
доцент, заведующий кафедрой промышленной теплоэнергетики,
Самарский государственный технический университет,
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Российская Федерация,
e-mail: a.v.eremin@list.ru
Anton V. Eremin,
Cand. Sci. (Technics),
Associate Professor, Head of Industrial Heat Power Engineering Department,
Samara State Technical University,
244 Molodogvardeiskaya St., Samara, 443100, Russian Federation,
e-mail: a.v.eremin@list.ru

Губарева Кристина Владимировна,
аспирант кафедры промышленной теплоэнергетики,
Самарский государственный технический университет,
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Российская Федерация,
e-mail: r.kristina2017@mail.ru
Kristina V. Gubareva,
Postgraduate of Industrial Heat Power Engineering Department,
Samara State Technical University,
244 Molodogvardeiskaya St., Samara, 443100, Russian Federation,
e-mail: r.kristina2017@mail.ru