

УДК 629.4.015 + 625.1.03

Оценка точности и повышения скорости вычислительного процесса при использовании метода фрагментирования и локальной адаптации конечно-элементных моделей на примере трёхмерной модели полости в виде сфероида

© Ф.М. Минаев, Д.А. Еловенко

*Иркутский национальный исследовательский технический университет,
г. Иркутск, Российская Федерация*

Аннотация. Описаны особенности напряжённо-деформированного состояния (НДС) упругого пространства с малой сфероидальной полостью, растягиваемого вдоль её малой оси (оси вращения). Исследована и определена вычислительная погрешность дискретного моделирования этого НДС методом конечно-элементного моделирования и анализа в программном комплексе FEMAP (Finite Element Modeling Application Post processing). Предложен подход для моделирования твёрдых тел с наличием полости (выемки, канавки), существенно повышающий скорость вычислительного процесса с сохранением точности получаемых результатов, на основе метода фрагментирования и локальной адаптации конечно-элементной сетки, продемонстрирована эффективность данного подхода. Приведена зависимость вычислительной погрешности в контрольной точке наблюдения от степени конечно-элементной дискретизации зоны концентрации напряжений (зоны контрольной точки) на примере четырёх итераций с последовательным сгущением узлов сетки на четверти дуги в плоскости центрального сечения сфероида (8, 12, 16 и 32 связи).

Ключевые слова: геометрическая модель, метод фрагментирования, конечно-элементная модель, разномасштабная конечно-элементная модель

Estimation of the accuracy and increase in the speed of the computational process when using the fragmentation method and local adaptation of finite element models using the example of a three-dimensional model of a cavity in the form of a spheroid

© Fedor M. Minayev, Denis A. Elovenko

*Irkutsk National Research Technical University,
Irkutsk, Russian Federation*

Abstract. The article describes the features of the stress-strain state (SSS) of an elastic space with a small spheroidal cavity, stretched along its minor axis (axis of rotation). The article investigates and determines the computational error of discrete modeling of this SSS by the method of finite element modeling and analysis in the FEMAP software package (Finite Element Modeling Application Post processing). The article proposes an approach for modeling solids with a cavity (recess, groove), which significantly increases the speed of the computational process while maintaining the accuracy of the results obtained, based on the fragmentation method and local adaptation of a finite element mesh, and demonstrates the effectiveness of this approach. The article presents the dependence of the computational error at the control point of observation on the degree of finite element discretization of the stress concentration zone (control point zone) by the example of four iterations with successive condensation of grid nodes by quarter-arc in the plane of the central section of the spheroid (8, 12, 16 and 32 links).

Keywords: geometric model, fragmentation method, finite element model, multi-scale finite element model

Скорость выполнения численных экспериментов зависит от определённых факторов, одним из которых является количество конечных элементов в модели. Особенно актуально этот вопрос встаёт, когда речь идёт о вариантных исследованиях разномасштабных моделей в условиях ограниченности вычислительных ресурсов. В этой

связи происходит поиск новых методов моделирования разномасштабных геометрических объектов и определение подходов к снижению вычислительного (машинного) времени конечно-элементного анализа модели какого-либо объекта.

Конечно-элементное (КЭ) приближение рассматриваемого НДС при заданной сте-

пени дискретизации растягиваемого сплошного цилиндра с малой сфероидальной полостью (раковиной), характеризуемого отношением

$$a/b = 3, \quad (1)$$

где a – большая полуось сфероиды ($a = 1$ м), b – малая. Величина напряжения σ_z^∞ задаётся равной 1 Па.

Точное аналитическое решение задачи о растяжении упругого пространства со сферической полостью приведено в [1, 2].

Решение задачи о растяжении упругого цилиндра с малой сфероидальной полостью (малой внутренней выточкой в виде эллипсоида вращения, ось симметрии которого совпадает с осью симметрии рассматриваемого цилиндра) приведено в [3, 4]. Также образец, находящийся под действием растягивающих напряжений и содержащий единственный концентратор напряжения – сферическую пору радиусом, был рассмотрен в [5].

Исследуемая задача является осесимметричной и одновременно центрально-симметричной. Кроме того, размер сфероидальных полостей предполагается малым. Вследствие этого при построении решения достаточно рассмотреть сегмент упругого пространства, образованный плоскостями, две из которых проходят через ось вращения рассматриваемой области. Третья плоскость, ограничивающая цилиндр, перпендикулярна осевым сечениям и проходит через центр сфероидальной полости (на рисунках 1, 2 – сферической), четвёртая также перпендикулярна оси вращения и удалена от третьей на расстояние существенно большее, чем размер оси сфероидальной полости (рис. 1).

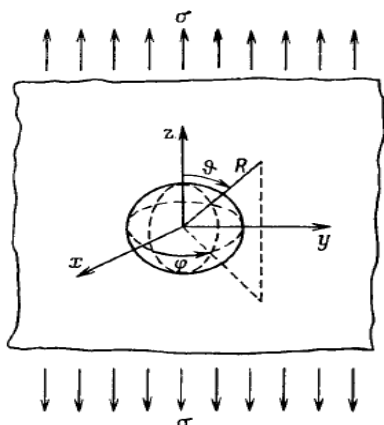


Рис. 1. Схема расположения сферической полости в упругом пространстве и направление растягивающего усилия

При рассмотрении осесимметричных задач теории упругости для кругового цилиндра с малой сфероидальной полостью выточкой предполагается, что плоскость $z = 0$ проходит через центр полости. Немецкий исследователь А. Леон (A. Leon, 1908 г.) установил, что если вдали от сферы нормальные напряжения σ_z^∞ постоянны, а другие компоненты напряжений равны нулю, то максимальное значение нормальных напряжений σ_z^{max} возникает в плоскости $z = 0$ (на рисунках 1, 2 – нижний край сектора цилиндра со сферической выемкой) на поверхности сферы. При этом было также установлено, что коэффициент концентрации осевых напряжений $k_{\sigma z}$ определяется равенством

$$k_{\sigma z} = \frac{\sigma_z^{max}}{\sigma_z^\infty} = \frac{27 - 15\nu}{2(7 - 5\nu)} \quad (2)$$

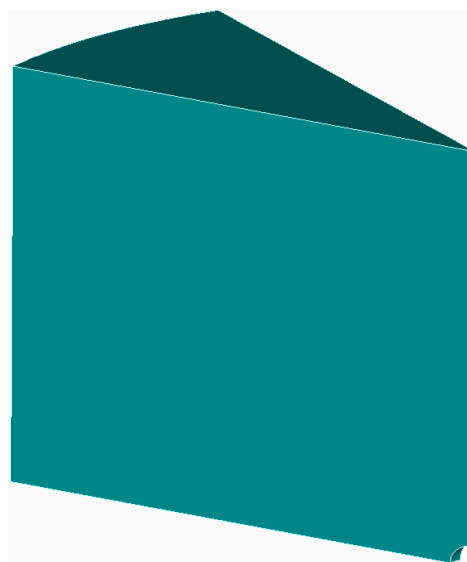


Рис. 2. Геометрическая модель сегмента упругого пространства

Здесь и далее расчёты всех величин производятся для материала упругого пространства, обладающего следующими характеристиками:

$$\nu = 0,3; E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \quad (3)$$

где ν – коэффициент Пуассона, E – модуль продольной упругости. Отметим также, что в соответствии с формулой (2) величина коэффициента концентрации напряжений $k_{\sigma z}$ от величины модуля E не зависит. С учётом равенства (3) для рассматриваемого случая соотношение (2) принимает вид

$$k_{\sigma z} = 45/22 \cong 2,045. \quad (4)$$

Более общий случай – малая выточка в виде сфероида (рис. 3) – впервые был изучен немецким исследователем Г. Нейбером. В частности им была установлена формула для значения максимального нормального

(в координатах рисунка 3 – осевого) напряжения на внутренней поверхности сфероида, которое возникает в плоскости $z = 0$. Соответствующая формула для коэффициента концентрации осевых напряжений имеет вид

$$k_{\sigma z} = \frac{\sigma_z^{\max}}{\sigma_z^{\infty}} = \frac{1}{N} \left\{ 2 \frac{a^4}{b^4} - (1,5 - \nu) \frac{a^2}{b^2} + (1 - \nu) + \left[-(1,5 + \nu) \frac{a^2}{b^2} + \nu \right] \frac{a^2}{b^2} c^2 \right\}. \quad (5)$$

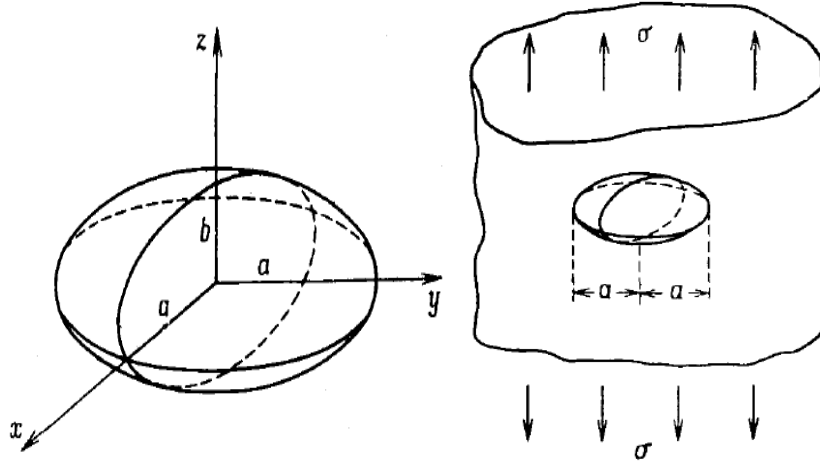


Рис. 3. Сфероидальная полость в трёхмерной системе координат и в упругом пространстве

В соотношении (5) значения величин N

и c определяются равенствами:

$$c = \frac{\arctg \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}}; N = \frac{a^2}{b^2} + 1 - \nu \left(\frac{a^2}{b^2} - 2 + \nu \right) c \frac{a^2}{b^2} - (1 + \nu) \frac{a^4}{b^4} c^2. \quad (6)$$

Как и в случае сферической полости, значение коэффициента концентрации напряжений $k_{\sigma z}$, определяемое формулой (5), не зависит от значения модуля упругости E . Если подставить в (5), (6) принятые нами соотношения $a/b = 3$ и $\nu = 0,3$, нетрудно получить значение коэффициента $k_{\sigma z}$, соответствующее точному аналитическому решению рассматриваемой задачи

$$k_{\sigma z} = 4,572 \quad (7)$$

При построении КЭ-модели упругое пространство моделируется цилиндрической областью с высотой цилиндра (в области положительных значений координаты z), равной 20 м. Радиус цилиндра принимается равным также 20 м, радиус сферической полости – 1 м, угловой размер рассматриваемого сектора цилиндра – 30° . Геометрическая модель этого объекта (рис. 2) может быть создана и транслирована в программу конечно-элементного моделирования и ана-

лиза в одном из форматов (например, Parasolid).

На основе созданной геометрической модели исследуемого объекта сгенерировали управляемую объёмную конечно-элементную сетку с помощью контроля размеров и количества конечных элементов по образующим кривым (рёбрам) (рис. 4).

В этом случае сетка с КЭ первого порядка со стандартными свойствами материала, описанными выше, создаётся автоматически на указанных объёмных объектах модели.

Моделирование граничных условий предполагает обеспечение условия осевой симметрии относительно оси вращения z , а также имитацию присутствия симметричной части модели (рис. 2) относительно плоскости xu (рис. 3).

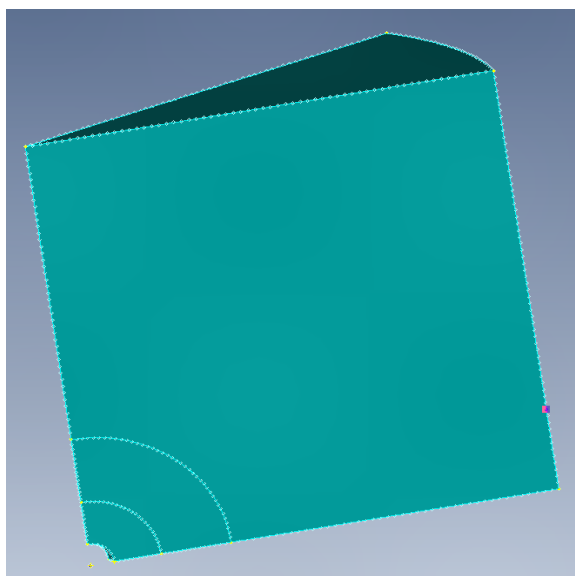


Рис. 4. Фрагментированная геометрическая модель сегмента упругого пространства

Моделирование единичного растягивающего напряжения σ (рис. 1) величиной в 1 МПа реализуется путём его приложения к верхней плоскости объекта (рис. 2, 4, 5) в

виде сектора в 30° .

Степень сгущения конечно-элементной разбивки определялась при этом числом конечных элементов на дуге.

Таким образом, были рассмотрены схемы конечно-элементных разбинок, в которых образующая сфероид дуга равномерно разбивалась конечными элементами на 8, 12, 16 и 32 интервала (рис. 5 а, б, в, г).

В последнем случае вычислительное время расчётной модели могло достигать двух часов в зависимости от расчётного случая. Расчёт проводился на ПК (четырёхъядерный процессор Intel(R) Core™ i5-7300HQ с тактовой частотой в 3 гигагерц, оперативная память 16 GB, операционная система Windows 10). Соответствующие результаты вычислительного эксперимента представлены в таблице 1. Относительная погрешность эквивалентных напряжений на каждом следующем шаге увеличения количества КЭ на образующей дуге сфероида определялась согласно методике, описанной в [7].

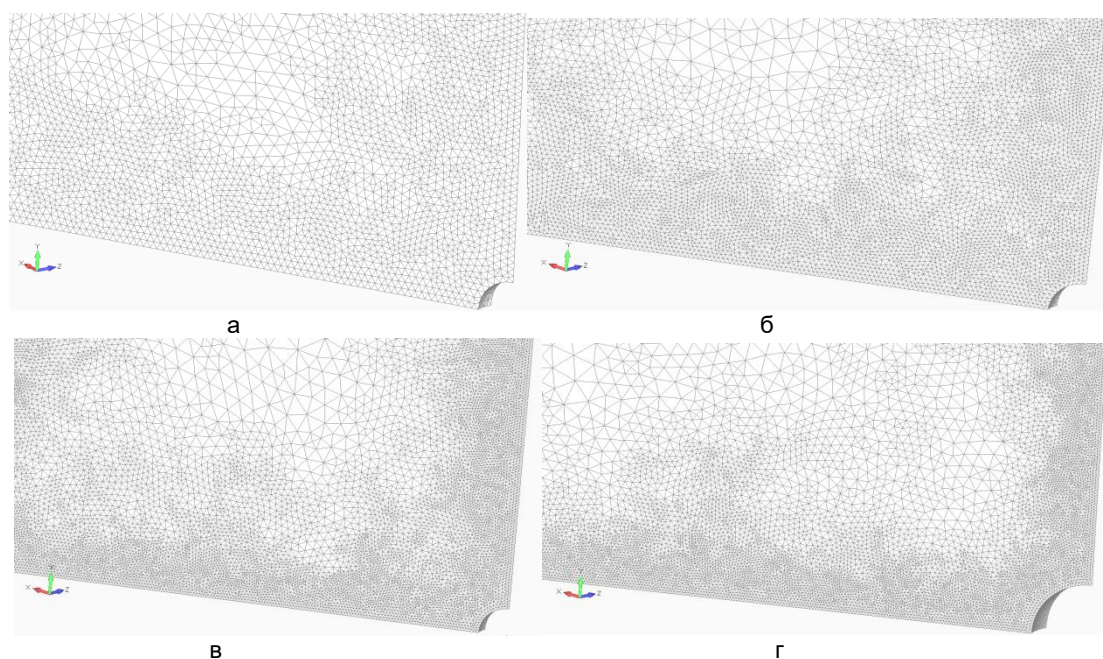


Рис. 5. Варианты разбиения рабочей зоны в случае равномерной разбивки всей модели на 8, 12, 16 и 32 элемента на дуге

Таблица 1. Результаты вычислительного эксперимента для равномерных разбинок сфероидальной полости сплошной модели

№ Варианта	Кол-во элементов на дуге, образующей полость сфероида	Количество КЭ в модели, шт.	Время счета, с	Относительная погрешность, P	Относительная погрешность k_{qz} , %	Относительная погрешность $\sigma_{экв}$, %
1	8	450341	75		9,5389	
2	12	1027418	861	1,864821	7,5088	2,793203
3	16	1501350	2075	1,277311	2,6667	5,513832
4	32	4712127	8211	2,017874	2,0126	1,617321

Как уже можно было заметить, построенные по такому принципу КЭ-модели являются весьма ресурсоёмкими, время их анализа довольно велико, особенно на последней итерации.

С целью снижения времени расчёта модели нами была применена представленная в [6] методика фрагментирования исходной геометрии модели со склеенным типом соединяемых фрагментов модели (1...Glued) (рис. 6).

Далее генерация КЭ-сетки уже происходила на каждом из трёх фрагментов отдельно (рис. 7), но с согласованием количества элементов на общих кривых смежных объёмов.

Аналогично вышеприведённым моделям были рассмотрены схемы конечно-элементных разбинок, в которых образующая сфероид дуга в последнем самом малом по объёму регионе равномерно разбивалась конечными элементами на 8, 12, 16 и 32 интервала (рис. 8 а, б, в, г).

Соответствующие результаты вычислительного эксперимента представлены в таблице 2. Относительная погрешность эквивалентных напряжений на каждом следующем шаге увеличения количества КЭ на образующей дуге сфероида определялась согласно методике, описанной в [7].

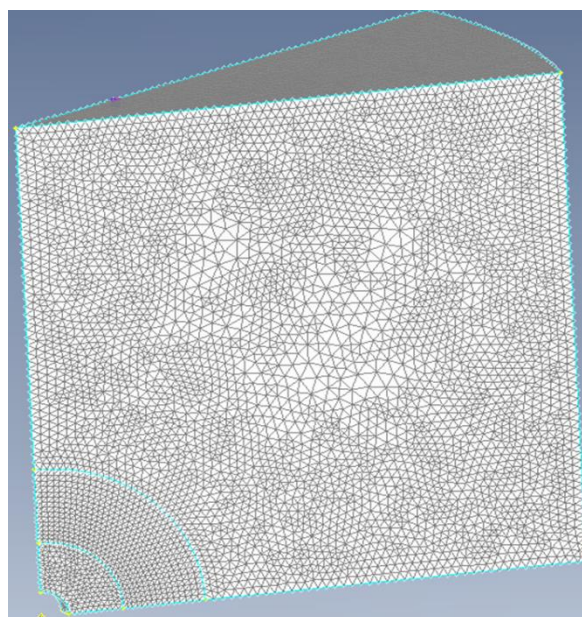


Рис. 7. Фрагментированная КЭ-сетка

Вычислительно более эффективной, чем схема с равномерной разбивкой полного объёма, оказалась схема с применением метода фрагментирования и их локальной адаптации, в которой исходный объём был разделён на три фрагмента: 1 – 18674 КЭ, 2 – 13481 КЭ, 3 – 210547 КЭ. Количество КЭ на фрагменте представлено соответственно на 1, 2 и 3 фрагменте.

При этом время расчёта для дискретной модели, обеспечивающей необходимую точность инженерного анализа в 5 %, не превышало 16 секунд.

Полученный результат моделирования, представленный на рис. 9, позволяет при использовании теоретически точного решения (2), (4) количественно оценить относительную погрешность КЭ-моделирования, которая для сфероидальной полости составляет 2,29 %.

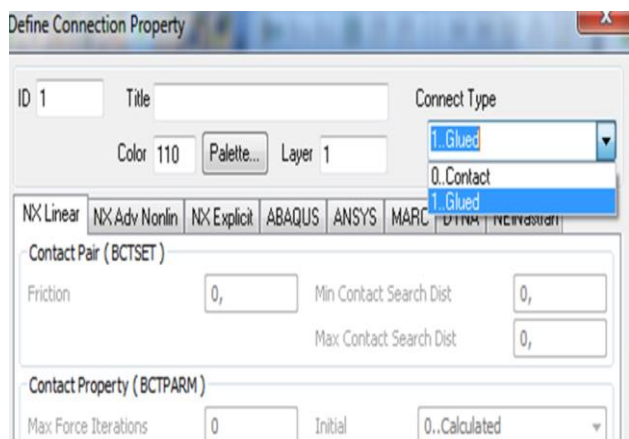


Рис. 6. Окно задания свойств соединения объектов

Таблица 2. Результаты вычислительного эксперимента для случая равномерных разбинок дуги канавки модели с применением метода фрагментирования

№ Варианта	Кол-во элементов на дуге, образующей полость сфероида	Количество КЭ в модели, шт.	Время счета, с	Относительная погрешность, P	Относительная погрешность k_{qz} , %	Относительная погрешность $\sigma_{экв}$, %
1	8	231060	13	–	12	
2	12	241277	15	1,795396	7,15	6,133275
3	16	237624	15,6	2,174951	5,47	2,531283
4	32	253462	16	2,452454	2,29	2,445863

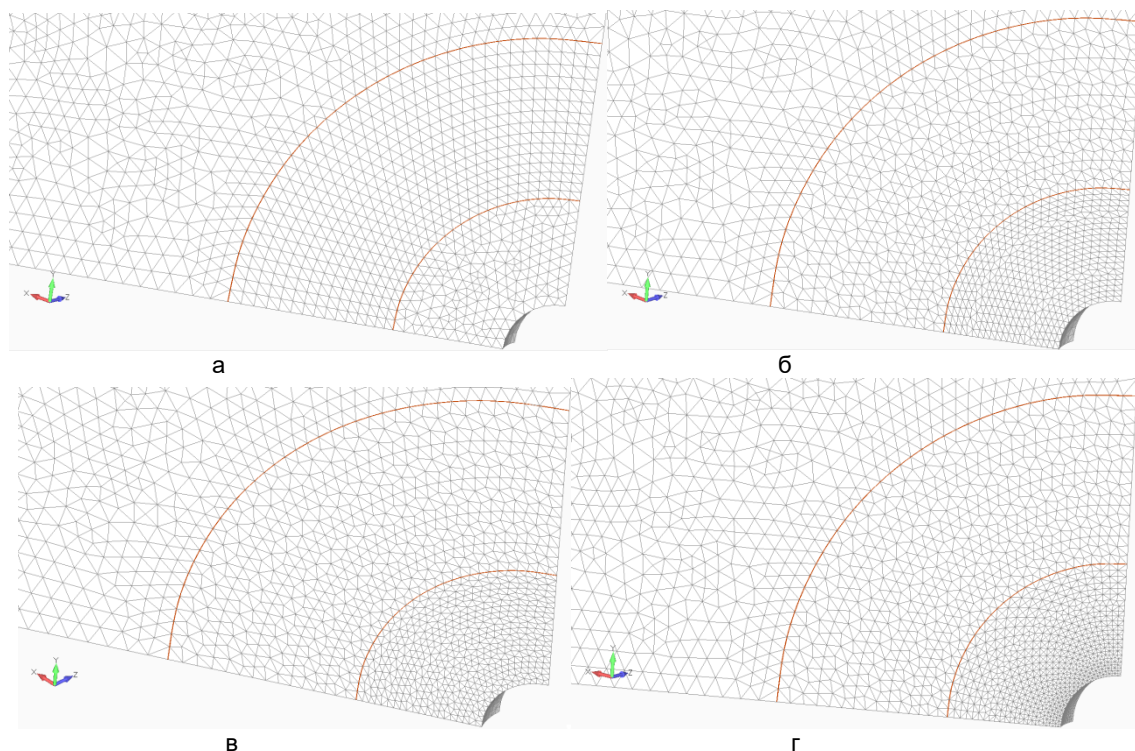


Рис. 8. Варианты разбиения в случае разбивок с применением фрагментации модели 8, 12, 16 и 32 элемента на дуге, образующей полость сфероида

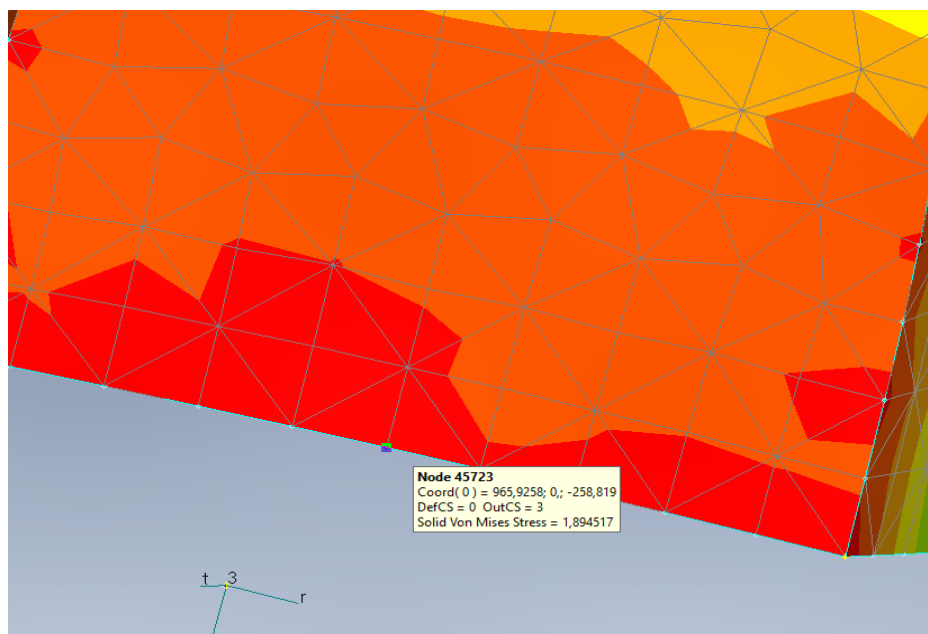


Рис. 9. Зона локализации контролируемых напряжений

Таким образом, достаточно точным (то есть с относительной погрешностью сходимости, не превышающей 5 %) расчётным вариантом стала разбивка с 16 КЭ на дуге, образующей полость сфероида. Для обеспечения минимальной относительной погрешности был применён метод сгущения сетки (локальной адаптации), который позволил уменьшить размеры КЭ по мере приближения к контрольной точке без суще-

ственного увеличения общего количества КЭ модели.

В заключение необходимо отметить, что среди известных исследований, которые проводились с применением разномасштабных сеток конечно-элементных моделей [8–10], не найдено подхода, который был применён нами в описанном выше исследовании.

Библиографический список

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Физматгиз, 1979. 560 с.
2. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
3. Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения. М.: Мир, 1988. 344 с.
4. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.: ОГИЗ, 1947. 205 с.
5. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Гвоздев А.Е., Кутепов С.Н., Сергеев А.Н., Агеев Е.В. [и др.]. Морфология объёмных зон пластичности у газонаполненных пор в литых и порошковых сталях в условиях стресс-коррозии // Известия Юго-Западного государственного университета. 2019. Т. 23. № 5. С. 35–52.
6. Еловенко Д.А., Носков Д.П., Сигов Р.С., Вальдимат Г.И. Метод локальной адаптации конечно-элементных сеток при исследовании НДС конструкций с малоразмерными геометрическими элементами // Молодежный вестник ИргТУ. 2019. Т. 9. № 2. С. 11–17. [Электронный ресурс]. URL: <http://xn--b1agjigi1ai.xn--p1ai/journals/2019/02/articles/02> (02.04.2021).
7. Зеньков Е.В., Цвик Л.Б., Пыхалов А.А. Дискретное моделирование напряженно-деформированного состояния плоскоцилиндрических образцов с концентраторами напряжений в виде канавок // Вестник ИргТУ. 2011. № 7 (54). С. 6–11.
8. Шабуневич В.И., Шабуневич А.В. К вопросу физического обоснования критериев единой теории физики // Евразийский Союз Ученых. 2020. № 12 (81). С. 47–55.
9. Кудимова А.Б., Наседкин А.В. Конечно-элементный анализ эффективных свойств корундосодержащей пьезокерамики с разномасштабными порами // Вычислительная механика сплошных сред. 2020. Т. 13. № 1. С. 44–59.
10. Hui Jin Jin, Su Jun Wu. Effect of plasticity constraint on structural integrity assessment of pressure vessel welds // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2015. № 134. P. 72–81.

Сведения об авторах / Information about the Authors

Минаев Фёдор Михайлович,
студент группы СДМ-18-1,
Институт авиационного машиностроения и транспорта,
Иркутский национальный исследовательский
технический университет,
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, Россий-
ская Федерация,
e-mail: minaev3000@inbox.ru

Fedor M. Minaev,
Student,
Institute of Aircraft Engineering and Transport,
Irkutsk National Research Technical University,
83 Lermontov Str., Irkutsk, 664074, Russian Federa-
tion,
e-mail: minaev3000@inbox.ru

Еловенко Денис Александрович,
кандидат технических наук,
доцент кафедры конструирования и стандартиза-
ции машиностроения,
Институт авиационного машиностроения и транспорта,
Иркутский национальный исследовательский
технический университет,
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, Россий-
ская Федерация,
e-mail: elovenko03@gmail.com

Denis A. Elovenko,
Cand. Sci. (Technics),
Associate Professor of Design and Standardization
of Mechanical Engineering Department,
Institute of Aircraft Engineering and Transport,
Irkutsk National Research Technical University,
83 Lermontov Str., Irkutsk, 664074, Russian Federa-
tion,
e-mail: elovenko03@gmail.com