

## Учёт физической нелинейности при определении предельной нагрузки стержневой конструкции

© В.П. Яценко, Д.М. Никитина

*Иркутский национальный исследовательский технический университет,  
г. Иркутск, Российская Федерация*

**Аннотация.** Учёт нелинейной работы материала и правильный выбор условий прочности позволяет более точно оценить несущую способность конструкции, что приводит к более экономичным конструктивным решениям. При расчёте стальных конструкций с использованием нелинейных диаграмм деформирования удаётся получить более точную картину напряжённо-деформированного состояния, что позволяет эффективно использовать возможности конструкционных материалов при расчёте элементов конструкций на прочность. В работе приведено описание наиболее распространённых зависимостей между интенсивностями напряжений и деформаций, используемых при описании нелинейного поведения материала, рассмотрены различные методы решения задач определения предельной нагрузки для конструкции. Определена предельная нагрузка для стержневой системы аналитическим методом. Приведена процедура создания физически нелинейной расчётной модели в программном комплексе SCAD Office (версия 21.1.9.7). Исследованы результаты нелинейного автоматизированного расчёта для стержневой системы, выполненные с использованием полученной модели. Проведено сравнение полученных результатов. Выявлена несогласованность результатов, полученных с применением аналитических методов и автоматизированного численного расчёта, поэтому требуются дополнительные исследования при использовании нелинейного анализа в расчётах на прочность и жёсткость как средства уточнения напряжённо-деформированного состояния конструкции.

**Ключевые слова:** физическая нелинейность, упруго-пластический материал, диаграммы деформирования, предельная нагрузка, SCAD Office

## Consideration of Physical Nonlinearity in Determining the Ultimate Load of a Bar System

© Vladimir P. Yashchenko, Darina M. Nikitina

*Irkutsk National Research Technical University,  
Irkutsk, Russian Federation*

**Abstract.** Taking into account the nonlinear operation of the material and the correct choice of strength conditions allows for a more accurately assess the bearing capacity of the structure, which leads to more economical design solutions. Calculation steel structures using nonlinear deformation diagrams succeeds in obtaining a more accurate picture of the stress-strain state, which makes it possible to effectively use the capabilities of structural materials when calculating structural elements for strength. The article describes the most common dependencies between the stress and strain intensities used to describe the nonlinear behavior of a material, discusses various methods for solving the problems of determining the ultimate load for a structure. The ultimate load for the bar system is determined by the analytical method. The article provides a description of the procedure for creating a physically nonlinear computational model in the SCAD Office software package (version 21.1.9.7). The authors study the results of the nonlinear calculation for automated bar system, made by using the obtained pattern. The results obtained are compared. The inconsistency of the results obtained using analytical methods and automated numerical calculations has been revealed, therefore, additional research is required when using nonlinear analysis in strength and stiffness calculations as a means of clarifying the stress-strain state of a structure.

**Keywords:** physical nonlinearity, elastic-plastic material, deformation diagrams, ultimate load, SCAD Office

При расчёте строительных конструкций в настоящее время преимущественно используются линейные расчётные модели. Однако применение нелинейных моделей расчёта позволяет более правильно определить величину и характер распределения внут-

ренних усилий в конструкции, более точно оценить прочность и жёсткость сооружения и, как следствие, повысить экономичность проектного решения. Нелинейный расчёт также используется для выяснения действительной несущей способности конструкции

за пределами стадии линейного деформирования, что даёт возможность получить существенную экономию материалов. Одним из путей уточнения расчётных схем инженерных конструкций является учёт нелинейно-упругих и упруго-пластических свойств материала. Нелинейно-упругим называется материал, законы нагружения и разгрузки которого совпадают. Если законы нагружения и разгрузки материала не совпадают, то материал называется упруго-пластическим (появляются необратимые пластические деформации). Задачи, в которых зависимость между напряжениями и деформациями в материале не подчиняется

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1 + \mu)} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2},$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – главные деформации,  $\mu$  – коэффициент Пуассона материала.

Зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций определяет ха-

рактер деформирования материала. Реальные диаграммы деформирования различных материалов (рис. 1 а) в практических расчётах аппроксимируют эмпирическими формулами. Приведём некоторые из них [5, 6].

В нелинейных расчётах для оценки суммарного изменения формы элемента, выделенного внутри тела, вводятся в рассмотрение интенсивности напряжений и деформаций. Интенсивности нормальных напряжений и линейных деформаций соответственно равны:

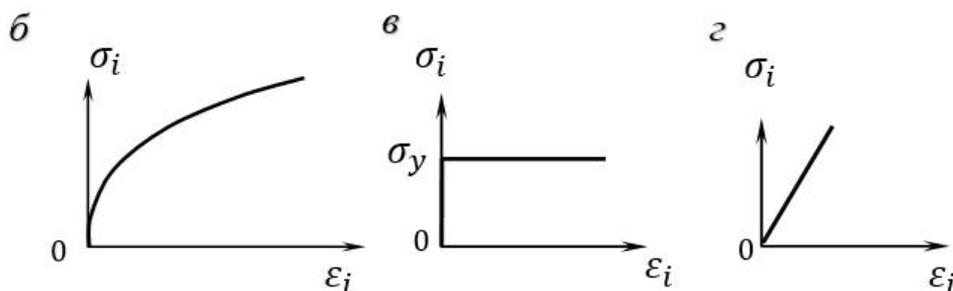
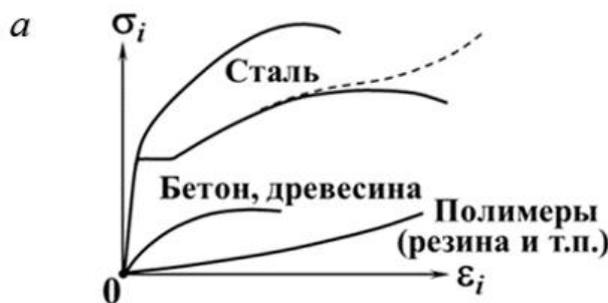


Рис. 1. Диаграммы деформирования материала

Первая предложена Г.Б. Бюльфингером в 1729 году. Степенной закон Бюльфингера представляет собой нелинейную зависимость, которая записывается в следующем виде:

$$\sigma_i = A \cdot \varepsilon_i^k,$$

где  $A$  – константа, имеющая размерность напряжений;  $k$  – безразмерный показатель

степени. Степенная зависимость хорошо описывает опытные кривые при  $0 \leq k \leq 1$  (рис. 1 б) и обладает достаточной универсальностью, так как при  $k = 0$  и  $A = \sigma_y$  получаем закон деформирования для жёстко-пластического тела (рис. 1 в), а при  $k = 1$  и  $A = E$  получаем закон деформирования для идеально упругого тела (рис. 1 г). Здесь  $\sigma_y$  –

предел текучести материала,  $E$  – модуль упругости материала. Несмотря на универсальность, степенная зависимость имеет также ряд недостатков. Во-первых, в большинстве случаев показатель степени  $k$  оказывается дробным числом, и поэтому решение получается в виде системы нелинейных алгебраических уравнений с нецелыми показателями, которые могут быть решены только численными методами. Во-вторых, степенная зависимость не имеет предельного значения, соответствующего пределу прочности материала, следовательно, материал деформируется с неограниченным упрочнением, то есть диаграмма не имеет ниспадающего участка, что не соответствует действительности. Однако ввиду простоты и универсальности степенная зависимость широко используется для описания нелинейного деформирования материала.

В целях расширения диапазона применения степенного закона в 1831 году Ф.И. Герстнером была предложена следующая зависимость:

$$\sigma_i = A_1 \cdot \varepsilon_i - A_2 \cdot \varepsilon_i^2,$$

где  $A_1 = E$ ,  $A_2$  – константы материала. Недостатком зависимости является то, что она несимметрична при растяжении и сжатии, так как  $(-\varepsilon_i)^2 = +\varepsilon_i^2$ . Поэтому зависимость Герстнера нельзя применять для расчёта конструкций, в которых возникают напряжения разных знаков (как, например, при изгибе). Тем не менее эта зависимость применяется при расчёте бетонных конструкций и в других случаях, где возникают напряжения только одного знака. Для того чтобы исправить этот недостаток зависимости Герстнера, необходимо во втором члене этой зави-

симости квадрат деформации заменить на третью степень:

$$\sigma_i = A_1 \cdot \varepsilon_i - A_2 \cdot \varepsilon_i^3.$$

Данная формула обеспечивает симметричность диаграммы при растяжении и сжатии, а при  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  автоматически переходит в закон Гука. Недостаток формулы состоит в том, что она не очень точно аппроксимирует экспериментальные диаграммы при больших деформациях.

Наиболее распространёнными идеализациями диаграммы  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$  в практике инженерных расчётов являются диаграммы идеального упруго-пластического материала без упрочнения или с линейным упрочнением. Модель идеального упруго-пластического материала без упрочнения (диаграмма Прандтля) представлена на рисунке 2 а. В случае использования данной модели:

$$\sigma_i = \begin{cases} E \cdot \varepsilon_i, & \text{если } \varepsilon < \varepsilon_y \\ \sigma_y, & \text{если } \varepsilon > \varepsilon_y. \end{cases}$$

На рисунке 2 б приведена диаграмма для упруго-пластического материала с линейным упрочнением. Данная модель более правильно описывает работу стальных стержневых конструкций при пластическом деформировании, поскольку учитывает упрочнение материала. Физическая зависимость между напряжениями и деформациями для этой модели имеет вид:

$$\sigma_i = \begin{cases} E \cdot \varepsilon_i, & \text{если } \varepsilon < \varepsilon_y \\ \sigma_y + E_{pl}(\varepsilon_i - \varepsilon_y), & \text{если } \varepsilon > \varepsilon_y. \end{cases}$$

Здесь  $E$  – модуль упругости материала,  $E_{pl}$  – модуль упруго-пластической деформации (модуль упрочнения).

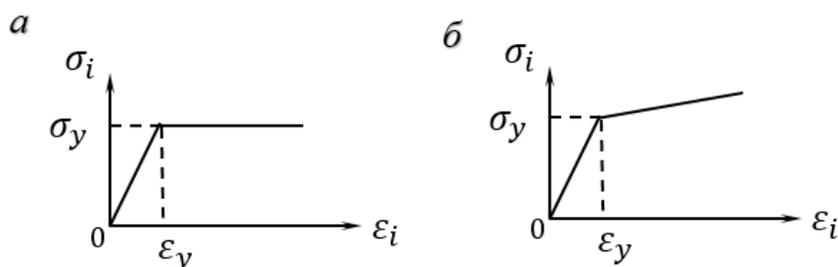


Рис. 2. Идеализированные диаграммы деформирования

При использовании нелинейных зависимостей между напряжениями и деформациями в практическом решении задачи возникает проблема решения системы нелинейных уравнений. Существуют различные методы решения, но наибольшее значение имеют шаговые методы. При этом исполь-

зуется простой шаговый метод без контроля точности решения, шаговый процесс с контролем невязок на каждом шаге или шагово-итерационный метод, когда выполняется итерационное уточнение решения на каждом шаге. Посредством шаговых методов нелинейная задача сводится к последова-

тельности линейно-упругих задач. Впервые один из вариантов такого метода был предложен А.А. Ильюшиным (метод упругих решений). В дальнейшем эта идея была развита в трудах И.А. Биргера (метод переменных параметров упругости). Одним из наиболее эффективных методов решения физически нелинейных задач также является метод Ньютона-Рафсона. Он обеспечивает быструю сходимость и может использоваться для задач с сильной нелинейностью [7].

Если для описания физической нелинейности используются модели жёстко-пластического или идеального упруго-пластического материала, то имеется возможность приближенной оценки несущей способности конструкции. Для определения предельной нагрузки используются статическая и кинематическая теоремы [6, 7, 8].

**Статическая теорема:** нагрузка, соответствующая статически возможному состоянию системы, меньше, чем предельная нагрузка. Статически возможным называется распределение напряжений, удовлетворяющее при заданных воздействиях уравнениям равновесия и статическим граничным условиям. Статически возможных состояний может быть множество, каждому равновесному состоянию соответствует своя нагрузка. Наибольшая из этих нагрузок близка к предельной.

**Кинематическая теорема:** нагрузка, соответствующая кинематически возможному состоянию системы, больше предельной нагрузки. Кинематически возможным называется распределение скоростей перемещений и деформаций, удовлетворяющее уравнениям совместности и кинематическим граничным условиям. Кинематически возможные состояния согласуются с опорными связями. Их может быть бесконечное множество, каждому из них соответствует нагрузка, которая не меньше предельной. Наименьшая из этих нагрузок наиболее близка к значению предельной нагрузки.

**Обобщающая (двойственная) теорема:** предельная нагрузка является максимальной из всех уравниваемых статически допустимыми полями напряжений (усилий) и вместе с тем минимальной из всех нагрузок, соответствующих кинематически допустимым распределениям перемещений и деформаций.

Возможности применения кинематической теоремы метода предельного равновесия покажем на примере расчёта шарнирно-стержневой системы (рис. 3 а). Стержни одинакового кольцевого поперечного сечения размерами  $D = 25$  мм,  $d = 20$  мм, площадью  $A = 177$  мм<sup>2</sup> из идеального упруго-пластического материала с пределом текучести  $\sigma_y = 200$  МПа.

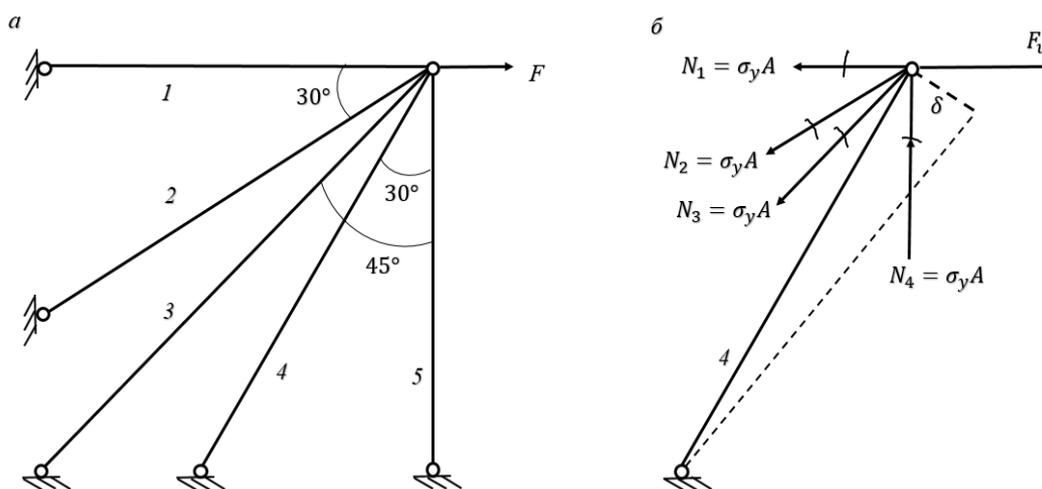


Рис. 3. Схема стержневой системы

Система три раза статически неопределима, для её разрушения в пластическое состояние должны перейти четыре стержня. Из пяти вариантов кинематически возмож-

ным является случай, когда не разрушен четвёртый стержень (рис. 3 б). Уравнение работ на возможном перемещении  $\delta$ :

$$F_u \cdot \delta \cdot \cos 30^\circ = \sigma_y \cdot A \cdot \delta \cdot \cos 30^\circ + \sigma_y \cdot A \cdot \delta \cdot \sin 30^\circ + \sigma_y \cdot A \cdot \delta \cdot \sin 15^\circ + \sigma_y \cdot A \cdot \delta \cdot \sin 30^\circ.$$

Тогда величина предельной нагрузки:

$$F_u = 2,45 \cdot \sigma_y \cdot A = 2,45 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 177 \cdot 10^{-6} = 86,7 \text{ кН.}$$

Усилие в четвёртом стержне при этой нагрузке  $N_4 = 0,239 \cdot \sigma_y \cdot A$ , что говорит о возможности данного варианта.

При использовании аналитических методов расчёта затруднительно учесть нелинейность деформирования элементов конструкции, поскольку проблематично подобрать монотонные функции, в общем случае описывающие закон распределения нелинейных деформаций по элементам. Применение метода конечных элементов (МКЭ) даёт возможность описывать физическую нелинейность каждого элемента на основании диаграммы деформирования и уровня напряжений в нём [9, 10, 11]. Решение задачи при этом сводится к правильной организации итерационного процесса с рацио-

нально выбранной функцией зависимости деформаций элемента от напряжений.

Для определения величины предельной нагрузки численным методом использовалась система прочностного анализа и проектирования конструкций SCAD (версия 21.1.9.7). Была создана модель шарнирно-стержневой системы, представленной на рисунке 3 а. Проведён нелинейный расчёт с применением шагового метода [12, 13, 14, 15]. При этом вектор узловых нагрузок на каждом шаге получает малое приращение до тех пор, пока система не становится геометрически изменяемой и расчёт не прекращается. Величина нагрузки в расчётном шаге, предшествующем остановке расчёта, считается предельной.

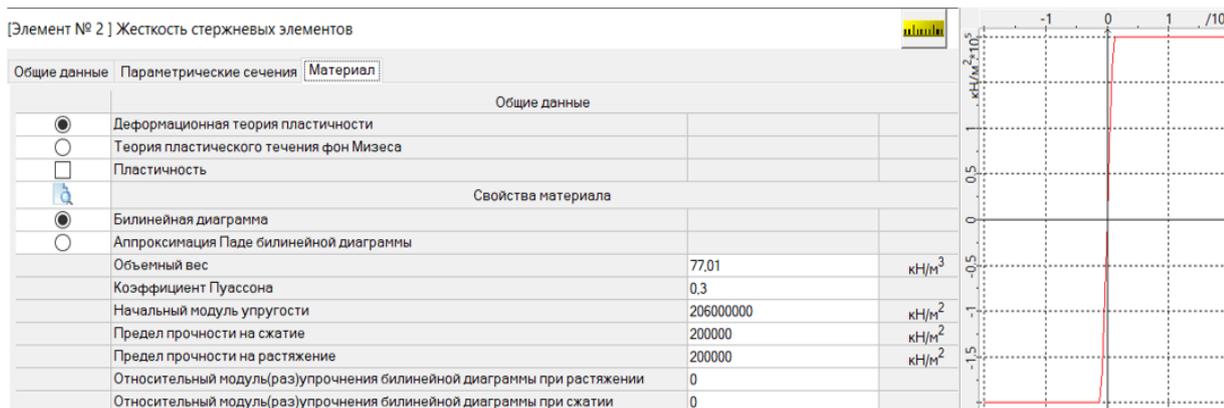
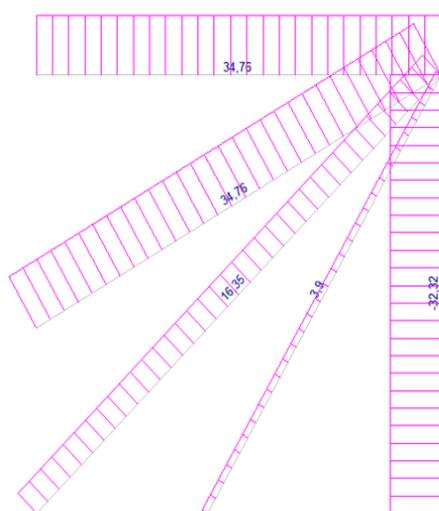


Рис. 4. Построение диаграммы деформирования материала



```

18:47:24 Загружение 1, шаг 19
18:47:24 Подготовка данных многофронтального метода
18:47:24 Разложение матрицы жесткости многофронтальным методом.
18:47:24 Геометрически изменяемая система по направлению 5 в узлах : 4
18:47:24 Накопление нагрузок.
18:47:24 Накопление нагрузок.
    Суммарные внешние нагрузки (кН, кНм)
18:47:24
18:47:24      X      Y      Z      UX      UY      UZ
1-    -78.4      0      0      0      0      0
18:47:24 Вычисление перемещений. Загружение 1, шаг 19
18:47:24 Вычисление усилий в нелинейных элементах
18:47:24 Корректировка перемещений. Загружение 1, шаг 19, итерация 2.
18:47:24 Получена невязка: по перемещениям - 0.0240395%, по нагрузке - 0.0257036%.
18:47:24 Вычисление усилий в нелинейных элементах
18:47:25 Выполнено заданное число итераций.
18:47:25 Потенциальная энергия (кНм)
18:47:25      0.0711934
18:47:25 Сортировка перемещений
18:47:26 Формирование файла усилий
18:47:26 Сортировка усилий и напряжений
18:47:26 ЗАДАНИЕ ВЫПОЛНЕНО
    Затраченное время : 0:00:31 ( 1 min )
    
```

Рис. 5. Эпюры продольных сил и фрагмент протокола расчёта

Для выполнения физически нелинейного расчёта используемым конечным элемен-

том назначается тип № 405 (пространственный стержень с учётом физической нели-

нейности). Выбор расчётной теории происходит на этапе создания расчётной модели при задании жёсткости элементам. Нелинейный режим расчёта вызывается установкой флажка «Физическая нелинейность» в диалоговом окне «Жёсткость». В диалоговом окне «Материалы» указываются физико-механические характеристики материала, выбирается вариант теории и форма диаграммы. Используемые исходные данные и схема диаграммы деформирования материала, полученная по ним, представлены на рисунке 4. Эпюры усилий в стержнях при действии предельной нагрузки и фрагмент протокола на последнем шаге перед прерыванием расчёта приведены на рисунке 5.

Из протокола расчёта на последнем шаге расчёта определяется величина предельной нагрузки на систему, полученная численным методом  $F_u = 78,4$  кН. При этом усилия в первом, втором и пятом стержнях близки к

предельному значению  $N_u = \sigma_y \cdot A = 200 \cdot 10^3 \cdot 177 \cdot 10^{-6} = 35,4$  кН, что говорит о правильности расчёта.

Сравнение результатов, полученных аналитическим и численным методами, даёт расхождение значений

$$\Delta F = \frac{86,7 - 78,4}{86,7} \cdot 100 \% = 9,6 \%,$$

то есть расчёт в ПК SCAD Office с использованием установок «по умолчанию» привёл к результату, где несущая способность конструкции несколько занижена. Таким образом, проведение автоматизированного расчёта не гарантирует абсолютно достоверный результат даже при использовании идеализированной диаграммы деформирования, поэтому требуются дополнительные исследования.

#### Библиографический список

1. Блохина Н.С., Воронов А.Н. О применении технической деформационной теории пластичности к расчету каменных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 1985. № 6. С. 20–23.
2. Блохина И.С. Проблема учета физической нелинейности при расчете строительных конструкций // Вестник МГСУ. 2011. № 6. С. 384–387.
3. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1988. 232 с.
4. Карпенко С.Н. О построении связей между приращениями напряжений и деформаций на основе различных диаграмм // Вестник гражданских инженеров. 2010. № 1 (22). С. 60–63.
5. Улицкий В.М., Шашкин А.Г., Шашкин К.Г., Васенин В.А. Расчетная оценка взаимного влияния зданий и подземных сооружений // Реконструкция городов и геотехническое строительство. 2004. № 8. С. 68–82.
6. Рудых О.Л., Соколов Г.П., Пахомов В.Л. Введение в нелинейную строительную механику. М.: Изд-во АСВ, 1998. 103 с. [Электронный ресурс]. URL: [https://www.studmed.ru/rudyh-o-l-sokolov-g-p-pahomov-v-l-vvedenie-v-nelineynuyu-stroitelnyuyu-mehaniku\\_0d4529c287f.html](https://www.studmed.ru/rudyh-o-l-sokolov-g-p-pahomov-v-l-vvedenie-v-nelineynuyu-stroitelnyuyu-mehaniku_0d4529c287f.html) (23.06.2021).
7. Евсеев Н.А. Учет физической нелинейности железобетонных конструкций при численных расчетах конструктивных систем // Вестник гражданских инженеров. 2017. № 5 (64). С. 66–70.
8. Шашкин К.Г., Шашкин В.А. Решение задач предельного равновесия с использованием метода конечных элементов // Жилищное строительство. 2013. № 4. С. 47–50.
9. Залесов А.С., Мухамедиев Т.А., Чистяков Е.А. Учет физической нелинейности при расчете железобетонных монолитных конструкций высотных зданий // Строительная механика и расчет сооружений. 2005. № 1. С. 4–8.
10. Клованич С.Ф., Мироненко И.Н. Метод конечных элементов в механике железобетона. Одесса: ОНМУ, 2007. 110 с.
11. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. М.: Изд-во АСВ, 2000. 152 с.
12. Теплых А.В. Применение оболочечных и объемных элементов при расчетах строительных стальных конструкций в программах SCAD и Nastran с учетом геометрической и физической нелинейности // Magazine of Civil Engineering. 2011. № 3. С. 4–20.
13. Hagsten L.G., Rasmussen A.B., Fisker J. Strain capacity of reinforced concrete members subjected to uniaxial tension // Procedia engineering. 2017. № 172. P. 338–346.
14. Fialko S.Yu., Perelmuter A.V. Inelastic analysis of reinforced concrete structures in SCAD // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2019. № 15 (1). P. 54–60.
15. Geraymovich Y.D., Yevzerov I.D., Marchenko D.V. The new physically nonlinear finite elements in software package LIRA 10.8 // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2019. № 15 (1). P. 61–66.

Сведения об авторах / Information about the Authors

**Ященко Владимир Петрович,**

кандидат технических наук,  
доцент кафедры механики и сопротивления ма-  
териалов,  
Институт архитектуры, строительства и дизайна,  
Иркутский национальный исследовательский  
технический университет,  
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, Россий-  
ская Федерация,  
e-mail: vp\_yashenko@mail.ru

**Vladimir P. Yashchenko,**

Cand. Sci. (Technics),  
Associate Professor of Mechanics and Strength of  
Materials Department,  
Institute of Architecture, Construction and Design,  
Irkutsk National Research Technical University,  
83 Lermontov Str., Irkutsk, 664074, Russian Federa-  
tion,  
e-mail: vp\_yashenko@mail.ru

**Никитина Дарина Михайловна,**

магистрант группы ТИМм-19-1,  
Институт архитектуры, строительства и дизайна,  
Иркутский национальный исследовательский  
технический университет,  
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, Россий-  
ская Федерация,  
e-mail: daruanika127@mail.ru

**Darina M. Nikitina,**

Postgraduate,  
Institute of Architecture, Construction and Design,  
Irkutsk National Research Technical University,  
83 Lermontov Str., Irkutsk, 664074, Russian Federa-  
tion,  
e-mail: daruanika127@mail.ru